III Développements mixtes

Simplicité de $SO(3)$ [4]

III.A Simplicité de $SO(3)$

Lemme 24:

Tout élément de $SO(3)$ est $O(3)$-semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $g \in SO(3)$. Alors comme g préserve la norme, si g admet une valeur propre réelle alors c'est ± 1. En effet $\|g(x)\| = \|x\|$ en particulier pour x un vecteur propre associé à une valeur propre réelle.

De plus comme $\deg(\chi_g) = 3$, l'endomorphisme g a nécessairement une valeur propre réelle.

Si λ est une valeur propre complexe de g, alors comme $\chi_g \in \mathbb{R}[X]$, nécessairement $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de g et les valeurs propre de g sont alors : $1, \lambda, \overline{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{U}$ car alors $\det(g) = \pm\lambda\overline{\lambda} = \pm|\lambda|^2$.

Au total, on a donc :

$$\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(g) \in \{(1,1,1), (1,-1,-1), (1,\lambda,\overline{\lambda}) \quad / \quad \lambda \in \mathbb{U}\}.$$

Dans tous les cas on a donc 1 est valeur propre de g. Soit alors u un vecteur propre associé. Soi $F = (\mathbb{R}u)^\perp = \mathrm{Vect}(v, w)$. Alors F est stable par g, en effet soit $z \in F$, alors

$$\langle u, g(z)\rangle = \langle\, {}^t g(u), z\rangle = \langle g^{-1}(u), z\rangle = \langle u, z\rangle = 0$$

Donc g induit un endomorphisme sur F. De plus, cet endomorphisme est de déterminant 1 et conserve la norme. C'est donc un élément de $SO(2)$, c'est-à-dire une rotation du plan F. Donc sa matrice dans une certaine base de F est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ceci conclut la preuve du lemme. ■

Théorème 25:

Le groupe $SO(3)$ est simple.

Démonstration. Soit $H \lhd SO(3)$ un sous-groupe distingué non trivial de $SO(3)$. Montrons qu'il s'agit du groupe en entier.

$SO(3)$ est connexe par arcs. En effet, si $g \in SO(3)$, alors on dispose de $P \in O(3)$ tel que $g = PR_\theta P^{-1}$ où R_θ est définie comme dans le lemme précédent. Alors l'application :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & SO(3) \\ t & \mapsto & PR_{t\theta}P^{-1} \end{array}$$

est une application continue reliant I_3 et g. Ceci prouve la connexité par arcs de $SO(3)$.

Soit $h \in H$ un élément non trivial. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} SO(3) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}([g,h]) \end{array}$$

L'intervalle $\varphi(SO(3))$ L'application φ est continue comme composée d'application continue, donc $\varphi(SO(3))$ est connexe comme image continue d'un connexe. C'est donc un connexe de $\mathbb{R}$, donc convexe et donc c'est un intervalle.

D'une part $\varphi(I_3) = 3$.
D'autre part $\forall g \in SO(3) \quad \varphi(g) = 1 + 2\cos\alpha$ pour αangle de g (cf lemme). Donc $\forall g \in SO(3) \quad \varphi(g) \leqslant 3$.

Comme de plus $SO(3)$ est compacte, $\varphi(SO(3))$ est compacte comme image continue d'un compact. Donc $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$ avec $a \leqslant 3$.

Le centre de $SO(3)$ est trivial. Soit $h_0 \in Z(SO(3))$. Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$ et soit $g \in SO(3)$ une rotation d'axe D. Alors D est une droite propre de g associée à la valeur propre 1.
Comme $h_0 \circ g = g \circ h_0$, on a h_0 stabilise D. Par suite h_0 stabilise toutes les droites de l'espace. Donc $\mathrm{sp}(h_0) \in \{(1,1,1), (1,-1,-1)\}$. Supposons que $\mathrm{sp}(h_0) = (1,-1,-1)$ et soient alors u un vecteur propre pour la valeur propre 1 et v un vecteur propre pour la valeur propre -1. Alors $h_0(u+v) = u - v$. Comme u et v ne sont pas colinéaires, h_0 ne stabilise pas la droite $u + v$. C'est absurde.
Donc $\mathbb{Z}(SO(3)) = \{I_3\}$.

La borne $a < 3$.

$$\begin{aligned}
a = 3 &\Longrightarrow \forall g \in SO(3) \quad \varphi(g) = \mathrm{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) = 3 \\
&\Longrightarrow \forall g \in SO(3) \quad 1 + 2\cos\theta = 3 \\
&\Longrightarrow \forall g \in SO(3) \quad \theta = 2\pi\mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \forall g \in SO(3) \quad ghg^{-1}h^{-1} = I_3 \\
&\Longrightarrow \forall g \in SO(3) \quad gh = hg \\
&\Longrightarrow h \in Z(SO(3)) = \{I_3\}
\end{aligned}$$

C'est absurde. Donc $a < 3$.

Construction d'un retournement. On considère $\theta \ / \ 1 + 2\cos\theta = a$. On peut supposer $\theta \in [0, \pi]$. De plus l'application cos est décroissante sur $[0, \pi]$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ / \ 0 < \frac{\pi}{n} < \theta \qquad \text{on a :} \qquad 3 > 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) > a.$$

Soit $g_n \in SO(3)$ tel que $\varphi(g_n) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. On définit alors $h_n = [g_n, h]$. C'est donc une rotation d'angle π/n suivant un certain axe. Il s'en suit que h_n^n est une rotation d'angle $n \times \pi/n = \pi$, c'est-à-dire un retournement.

Comme H est distingué et $h \in H$, on a $h_n = \left(g_n h g_n^{-1}\right) h^{-1} \in H$ et donc H contient un retournement.

Les retournements sont conjugués et engendrent $SO(3)$. Soit $h \in H$ un retournement et soit D son axe. Soit $k \in SO(3)$ un retournement et soit Δ son axe. On considère g une rotation telle que $g(D) = \Delta$. Alors $ghg^{-1} \in H \lhd SO(3)$ et c'est une rotation d'angle π et d'axe $g(D) = \Delta$ (principe de conjugaison), c'est-à-dire que ghg^{-1} est un retournement d'axe Δ. Donc $ghg^{-1} = k$.
Il s'en suit que H contient tous les retournements. Or $SO(3)$ est engendré par les retournements. Donc $H = SO(3)$. ■